

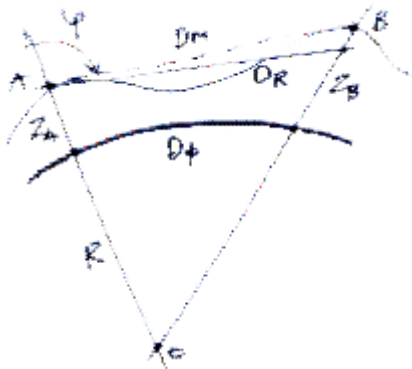
SISTEMI DI RIFERIMENTO CARTOGRAFICI



Nelle operazioni di restituzione i punti rilevati vengono elaborati e rappresentati nei seguenti sistemi di riferimento:

1. **LOCALE (o ARBITRARIO)** - Elaborazioni sul piano tangente ad un punto centrale della zona rilevata. Le verticali vengono considerate parallele: la riduzione delle distanze avviene quindi secondo la perpendicolare a tale piano di riferimento. Le coordinate del sistema di riferimento planimetrico hanno valore qualsiasi, non avendo alcuna influenza sui risultati delle elaborazioni. La quota assunta per tale piano è pure arbitraria e risponde solo ad esigenze pratiche dell'operatore.
2. **GAUSS - BOAGA** - Le elaborazioni nel sistema denominato GAUSS BOAGA (G.B.) richiedono che le misure (distanza e angoli azimutali) siano ridotte al piano della proiezione stessa, tenendo conto, per operare correttamente sul piano, di un opportuno modulo di deformazione. Vediamo nel dettaglio come si procede:

- a. Le distanze misurate vanno ridotte all'orizzonte della stazione strumentale $D_R = D_M \cdot \sin \varphi$



- b. b. In funzione della quota media alle quale si opera le distanze orizzontali vanno poi ridotte al GEOIDE.

$$D_{\text{g}} = D_{\text{R}} \frac{R}{R + Z_A}$$

E' necessario osservare che la riduzione della distanza alla superficie di riferimento deve essere eseguita solo per rilievi a scopo cartografico. Quando le misure hanno come scopo l'esecuzione di lavori, quali tracciamento di gallerie, funivie, rilievi di bacini idroelettrici, ecc. la riduzione non deve essere effettuata: quelle che interessano sono in effetti le distanze orizzontali con riferimento al piano orizzontale in un determinato punto del rilievo.

ESEMPIO: si abbia la misura di una distanza (lunghezza di un impianto funiviario) di circa 1500 m. ad una quota compresa fra i 1400 e i 1800 m. Se applichiamo la riduzione GEOIDE otteniamo:

$$\begin{aligned} Q_m &= 1600 \text{ m} \\ D_{\text{R}} &= 1500 \text{ m} \end{aligned} \Rightarrow D_{\text{g}} = 1500 \frac{R}{R + 1600}$$

Posto $R = 6370 \text{ Km}$ si ha:

$$D_{\text{g}} = 1499.623$$

Come si nota la riduzione al GEOIDE comporta una contrazione della distanza di circa 40 cm. Per un'opera come quella indicata si tratta di un valore assolutamente non accettabile.

- c. c. Le distanze ridotte al GEOIDE vanno poi trasformate per adeguarsi alle deformazioni insite nella proiezione di GAUSS. Si tratta di applicare ad esse il modulo di deformazione cartografica "m".

Si ottiene quindi $D_{\text{G}} = D_{\text{g}} \cdot m$

A questo punto si possono effettuare tutte le elaborazioni di tipo planimetrico (calcolo di coordinate, compensazioni, calcolo di azimut, ecc.) come se operassimo su un piano.

Nelle formule ed esemplificazioni precedenti sono stati impiegati dei termini, quali "R" ed "m" che richiedono delle precisazioni:

R : raggio della sfera locale alla latitudine media del rilievo oggetto di elaborazione.

m : modulo di deformazione lineare medio per l'arco oggetto di elaborazione.

Vediamo ora alcuni parametri numerici essenziali della rappresentazione di GAUSS - BOAGA.

- N° 2 FUSI di riferimento (EST-OVEST)

False origini OVEST : 1500 km EST : 2520 km

- Modulo di deformazione lineare

$$m = 1 + \frac{E_1^2 + E_1 E_2 + E_2^2}{6\varphi N}$$

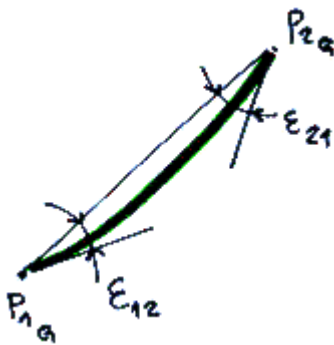
$$\varphi = \frac{a(1-e)}{\left(\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}\right)^3} \quad R = \sqrt{\varphi N}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{RAGGIO DELLA SFERA LOCALE}$$

$$\begin{aligned} a &= 6378388 \text{ m} \\ b &= 6356911.946 \text{ m} \\ S &= \frac{a-b}{e} = \frac{1}{297} \\ e^2 &= 0.0067226701 \end{aligned}$$

ELLIPSOIDE INTERNAZIONALE
(di Hayford)

- d. d. **Riduzione degli angoli** - Dato un arco di geodetica sull'ellissoide definito dai suoi estremi P_1, P_2 , questo si rappresenta nella carta di GAUSS in un arco di linea P_{1G}, P_{2G} . Per tale arco di trasformata le lunghezza della corda $P_{1G}-P_{2G}$ è praticamente uguale alla lunghezza dell'arco di trasformata (si tratta di differenze nell'ordine di un millimetro su archi di 100 km). L'angolo che la tangente in P_{1G} all'arco di geodetica trasformata forma con la corda è dato da:

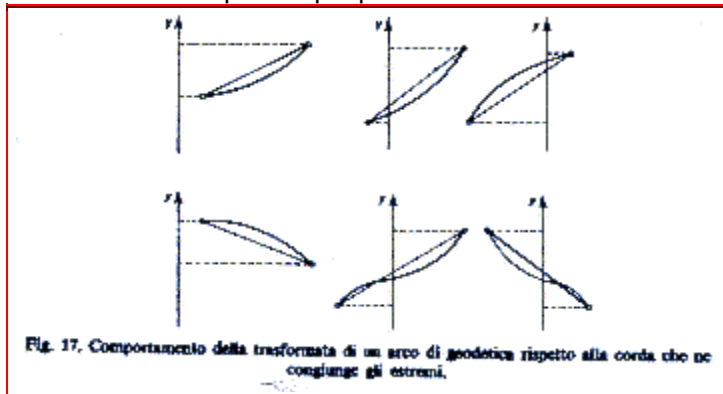


$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{6\rho N} (N_1 - N_2)(2E_1 + E_2)$$

analogamente in P_{2G} :

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{6\rho N} (N_2 - N_1)(2E_2 + E_1)$$

L'angolo ε si chiama RIDUZIONE ANGOLARE ALLA CORDA. Come appare chiaro dalla formula precedente per gli angoli $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}$, il valore e segno di ε è legato all'orientamento dell'arco di geodetica e dalla sua posizione rispetto al meridiano centrale del fuso. Osservare a questo proposito lo schema sottostante.



A scopo puramente indicativo, vale a questo punto l'osservazione che gli archi presentano una curvatura come se le corde relative, considerate estensibili, fossero deformate da un "VENTO" che soffia dal meridiano centrale verso EST e verso OVEST (regola del VENTO).

Concludiamo l'analisi della proiezione di GAUSS con un esempio numerico relativo al problema della riduzione angolare alla corda.

$P_1 \begin{cases} 1647120.0 \\ 5150270.0 \end{cases}$
 $P_2 \begin{cases} 1648120.0 \\ 5155270.0 \end{cases}$
 $D = 5385,164 \text{ m}$
 $\varphi_u = 46^\circ$

Si hanno i valori

$\rho = 6'368711.0$
 $H = 6389511.098$

e quindi

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{6\rho H} (H_1 - H_2)(2E_1 + E_2) = 5.6''$$

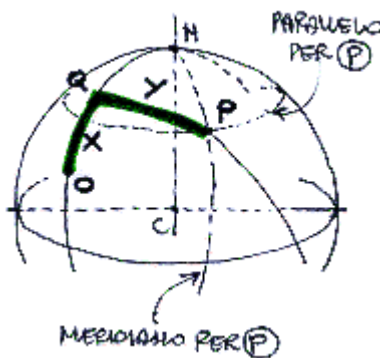
Si può osservare che quando le distanze in gioco superano poche migliaia di metri è sempre opportuno verificare l'entità della correzione angolare.

- **U.T.M.** (UNIVERSALE TRASVERSA DI MERCATORE) - Sistema di riferimento unificato europeo (ED50) Caratteristiche essenziali:
 - a. a. Ellissoide internazionale (Hayford) $a=6378388$ $S=1/297$
 - b. b. Centro di emanazione a Potsdam, con orientamento medio europeo (la verticale non coincide esattamente con la normale all'ellissoide).
 - c. c. Suddivisione in 60 FUSI di 6° ciascuno.
 - d. d. Rappresentazione sul piano con le condizioni particolari:
 - Coefficiente di riduzione delle coordinate $m=0.9996$
 - Falsa origine delle coordinate
 - $N = x \cdot 0.9996$
 - $E = y \cdot 0.9996 + 500000$
 - con x e y coordinate gaussiane.

Le elaborazioni avvengono secondo quanto già visto per le proiezioni di GAUSS.

4. **CASSINI - SOLDNER :**

5. La carta di Cassini-Soldner può ritenersi derivata da una proiezione cilindrica inversa.



Fu G. CASSINI che propose di scegliere le sue coordinate geodetiche ortogonali rettificata; esse sono, in ordine, l'arco di meridiano compreso tra un'origine arbitraria e il piede della perpendicolare a tale arco passante per P (sezione normale principale) e il segmento di quest'ultima.

La carta è equidistante sul meridiano di riferimento (asse delle x), nonché nelle direzioni ad esso normali.

Il modulo di deformazione in tutte le altre direzioni vale:

$$m = 1 + \frac{y^2 \cos^2 \alpha}{2qN}$$

5. 5. Il catasto ha adottato questa carta come sistema polcentrico, in cui le origini coincidono con un vertice della triangolazione IGM. Ciò comporta però lo svantaggio che i legami tra punti appartenenti a sistemi diversi sono complessi, limitando la praticità della carta.

L'ellissoide di riferimento è quello di BESSEL i cui parametri fondamentali sono

$$\begin{aligned}
 a &= 6377397.155 \\
 b &= 6356078.963 \\
 e2 &= 0.0066743721 \\
 S &= 1/299.15
 \end{aligned}$$

Dopo aver ridotto le distanze alla superficie di riferimento i calcoli relativi alle coordinate avvengono come segue:

$$(*) \left\{ \begin{aligned}
 X_2 &= X_1 + u + \frac{u y_1^2}{2R^2} - \frac{1}{3} \frac{u^3}{2R^2} \\
 y_2 &= y_1 + u - \frac{u^2 y_1}{2R^2} - \frac{1}{3} \frac{u^3}{2R^2}
 \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned}
 &\text{dove} \\
 u &= D \cos \alpha \\
 u &= D \sin \alpha
 \end{aligned}$$

Le (*) costituiscono le equazioni di SOLDNER.