Geodesia

Lo scopo principale e` quello di “rilevare” una porzione qualsiasi della superficie terrestre: determinando la posizione assoluta e relativa dei punti appartenenti alla superficie; la posizione assoluta e` riferita alla terra, almeno in linea teorica (baricentro terrestre).

Notare che all’atto pratico non si può` istituire una superficie di riferimento direttamente sulla superficie terrestre, date le innumerevoli irregolarità` della stessa; da qui nasce la necessita` di trovare una opportuna superficie di riferimento, magari facile da determinare matematicamente.

Sarebbe ideale trovare una superficie matematica tale che sia adatta come riferimento assoluto per le coordinate, e sia inoltre ben approssimante l’andamento della superficie del nostro pianeta.

Ai fini di detto rilievo, la scelta di una ben definita superficie di riferimento deve seguire questa linea:

1. istituire una corrispondenza biunivoca fra i punti della superficie fisica e i corrispondenti punti sulla superficie matematica secondo una legge nota;
2. determinare delle relazioni di posizione tra i punti sulla superficie matematica mediante una geometria sulla superficie stessa (**rilievo planimetrico**);
3. determinare delle relazioni che leghino i punti della superficie matematica a quelli della terra (**rilievo altimetrico**);

Schema generale per il rilievo delle zone della superficie terrestre

1. individuare sulla superficie fisica della terra un insieme discreto di punti in posizione opportuna ed in numero adeguato secondo gli scopi;
2. ognuno di questi punti da` luogo mediante opportune proiezioni ad un punto corrispondente sulla superficie matematica adottata (proiezione sul geoide);
3. portati tutti i punti sulla superficie matematica, si determina la posizione relativa tra i vari punti mediante misure di angoli e distanze;
4. si determina infine la distanza, misurata lungo la proiettante, fra ogni punto della superficie matematica e il corrispondente punto sulla superficie fisica; distanza che rappresenta la cosiddetta quota del punto.

Il numero di punti necessari per definire un rilievo e la conseguente rappresentazione cartografica di una qualsiasi zona della superficie terrestre e` funzione di numerosi fattori quali l’estensione morfologica della zona, la scala delle rappresentazioni, etc.

In ogni caso i punti da rilevare sono in generale sempre in numero elevato e possono dividersi in tre grandi gruppi: **punti di inquadramento, punti di raffittamento e punti di dettaglio.**

Punti di inquadramento: sono in piccolo numero rispetto al totale, costituiscono la rete di punti della maglia che interessa la porzione di superficie terrestre da rilevare;

Punti dettaglio: servono ad infittire i nodi della rete con punti rappresentanti particolari naturali o artificiali della zona da esaminare.

Punti raffittamento: servono d'appoggio, insieme a quelli d'inquadramento, alla determinazione dei punti di dettaglio.

Definizione della superficie di riferimento

La base di partenza per la soluzione del rilievo e` la scelta di una ben definita superficie di riferimento come supporto matematico su cui sviluppare analiticamente il rilievo della reale superficie fisica.

Si chiama **geoide** la superficie equipotenziale passante per il livello medio del mare in un determinato punto; la scelta del geoide sarebbe l'ideale come superficie matematica di riferimento, purtroppo il geoide non puo` essere esprimibile matematicamente in forma chiusa, per cui non si presta a che su di essa si possa istituire una geometria: non puo` essere scelto di conseguenza come superficie di riferimento su cui risolvere analiticamente i problemi del rilievo.

La funzione potenziale della gravita` terrestre risulta essere:

$$W(x,y,z) = \int_M G\frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right);$$

Queste superfici equipotenziali godono della proprieta` di essere in ogni punto normali al vettore accelerazione di gravita`, ossia alla direzione della verticale.

Si e` assunto come piu` agevole superficie di riferimento l'ellissoide (modello di Hayford):

a = 6378388 m   b = 6356912 m e^2 = 6,722670 x 10^{-3}

A causa delle ondulazioni del geoide (onde geoidiche), in un punto generico la verticale, che e` normale al geoide, non coincide con la normale all'ellissoide di riferimento: l'angolo da esse formato viene indicato col nome **deviazione della verticale**.

Per questo motivo c'e` la necessita` di introdurre un doppio sistema di coordinate, l'uno riferito alla verticale e quindi al geoide, e l'altro riferito alla normale alla superficie dell'ellissoide: il primo sistema servira` di riferimento per le misure eseguite sul terreno, il secondo per lo sviluppo dei calcoli e quindi per individuare la posizione dei punti oggetti del rilievo.

Il sistema universalmente adottato e` quello delle **coordinate geografiche** che individuano la posizione di un punto sulla superficie mediante due valori angolari, che definiscono la direzione della **normale** alla superficie stessa nel punto considerato. Se tale normale e` quella del geoide (filo a piombo) si parla di **coordinate geografiche astronomiche o geoidiche**; se la normale che si considera e` invece quella dell'ellissoide si hanno le **coordinate geografiche ellissoidiche**: quando non esiste possibilita` d'equivoco, generalmente s'intendono queste ultime come coordinate geografiche.

Se considero un punto P sulla superficie del geoide, la normale ad essa nel punto individua la verticale per P, che in generale non e` complanare con l'asse di rotazione terrestre. La direzione della verticale individua verso l'alto, nel senso della gravita` decrescente, il cosiddetto **zenit astronomico** di P e verso il basso, nel senso della gravita` crescente, il suo **nadir astronomico**.

I punti del geoide la cui longitudine rispetto al piano meridiano di riferimento e` la stessa costituiscono un meridiano geoidico; la latitudine e la longitudine di un punto P cosi` definite costituiscono le coordinate astronomiche.Il meridiano di riferimento e` stato scelto in sede internazionale come quello che passa per l'asse dell'Osservatorio Astronomico di Greenwich (Londra).

Dalle definizioni risulta che se la normale al geoide, cioe` la verticale, e quella all'ellissoide coincidessero, le coordinate astronomiche e quelle ellissoidiche sarebbero uguali. Ne consegue che, se in un punto determiniamo sia le coordinate astronomiche che quelle ellissoidiche, le eventuali differenze fra esse valgono ad individuare la deviazione della verticale nel punto stesso e servono da base per determinare lo scostamento locale tra geoide ed ellissoide.

La deviazione della verticale, calcolata in punti relativamente vicini, permette, nota la forma dell'ellissoide adottato per il riferimento, di costruire per punti il profilo del geoide, usando come base la superficie del geoide:

$$h_b - h_a = \int_{\phi_a}^{\phi_b} \rho \Delta\phi d\phi$$

ρ e` il raggio di curvatura del meridiano nel punto A; $d\sigma$ e` l'arco infinitesimo di meridiano; $\Delta\phi$ e' la deviazione della verticale localmente nel punto (piu` precisamente la componente meridiana della deviazione). Se quindi si conoscesse $\Delta\phi$ lungo tutti i punti del meridiano, si potrebbero calcolare le differenze di scostamento rispetto ad un qualunque punto prefissato. In pratica $\Delta\phi$ e` noto solo in un numero discreto di punti e per il calcolo si trasforma l'integrale precedente in una sommatoria ottenendo per punti il profilo del geoide lungo il piano desiderato. I profili del geoide si possono ottenere in modo analogo anche in qualunque altra direzione, purche` si calcoli la componente della deviazione della verticale lungo la direzione stessa.

La geometria dell'ellissoide di rotazione

Equazioni parametriche dell'ellissoide di rotazione

Riferiamo l'ellissoide di rotazione ad un sistema di assi ortogonali con l'origine al centro e l'asse z coincidente con l'asse di rotazione, l'asse delle x e delle y giaceranno sul piano equatoriale.

L'equazione canonica dell'ellissoide di rotazione riferita agli assi z,r e`:

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad ;$$

L'eccentricita` e` definita come: $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$; si ricava b in funzione di a ed e, poi si sostituisce nell'equazione canonica; si vuole esprimere le coordinate r e z del punto P in funzione della sua latitudine ϕ. Facendo un po' di passaggi algebrici si ottiene il valore di r, quest'ultimo, essendo il raggio del parallelo passante per P - notare che il parallelo e` una circonferenza - risulta essere coincidente con il raggio di curvatura del parallelo passante per il punto P:

$$r = \frac{a \cos\phi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\phi}}$$

Sempre con veloci passaggi si ottiene l'espressione per z:

$$z = \frac{a \operatorname{sen}\phi \left(1 - e^2\right)}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\phi}} \; ;$$

Queste sono le equazioni parametriche dell’ellisse meridiana, avendo assunto la latitudine come parametro. Infine le equazioni parametriche dell’ellissoide di rotazione sono:

$$\begin{cases} x = r\,cos\,\omega = \dfrac{a\,cos\,\phi\,cos\,\omega}{\sqrt{1-e^2\,sen^2\,\phi}} \\ y = r\,sen\,\omega = \dfrac{a\,cos\,\phi\,sen\,\omega}{\sqrt{1-e^2\,sen^2\,\phi}} \\ z = \dfrac{a\left(1-e^2\right)sen\,\phi}{\sqrt{1-e^2\,sen^2\,\phi}} \end{cases} ;$$

Il raggio di curvatura di una curva qualsiasi in un punto generico e` il limite del rapporto tra un elemento d’arco uscente da quel punto ed il corrispondente angolo di contingenza al tendere a zero di tale angolo. Calcoliamo ora il raggio di curvatura dell’arco di meridiano: per angolo di contingenza in questo caso si intende l’angolo formato dalle normali alla superficie nei punti estremi di tale arco, sicche` nel caso dell’ellissoide, esso corrisponderebbe alla variazione di latitudine $d\phi$; indicando con ρ il raggio di curvatura si ha :

$$\rho = \frac{d\sigma}{d\phi}$$

Da relazioni sul triangolo rettangolo infinitesimo con ipotenusa lungo il meridiano si ottiene l’espressione del raggio di curvatura del meridiano nel punto P:

$$\rho = -\frac{1}{sen\,\phi}\frac{dr}{d\phi} = \frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\,sen^2\,\phi\right)^{\frac{3}{2}}} ;$$

Notiamo che per $\phi = 0$ si ottiene il raggio di curvatura del meridiano all’equatore, mentre per $\phi = 90$ otteniamo il raggio di curvatura del meridiano ai poli. Poiche` l’ellissoide e` piu` schiacciato ai poli che all’equatore, risulta che il raggio di curvatura e` maggiore ai poli che all’equatore.

Una volta noti tali raggi di curvatura dei meridiani e dei paralleli, possiamo calcolare, per semplice integrazione, archi finiti “s”di meridiani e paralleli:

$$\begin{cases} ds_p = r d\omega \\ ds_m = \rho d\phi \end{cases} €;$$

inoltre esistono, a scala infinitesima, le seguenti relazioni su triangolo rettangolo infinitesimo:

$ds_m = ds\,cos\,\alpha$ $\qquad$ $ds_p = ds\,sen\,\alpha$; (α e` l’azimut tra meridiano e la curva generica “S” in P)

per cui risulterebbe:

$$ds\,sen\,\alpha = r d\omega \qquad ds\,cos\,\alpha = \rho d\phi$$

da cui si deducono le relazioni finali:

$$\begin{cases} cos\,\alpha = \rho\dfrac{d\phi}{ds} \\ sen\,\alpha = r\dfrac{d\omega}{d\phi} \\ tg\alpha = \dfrac{r}{\rho}\dfrac{d\omega}{d\phi} \end{cases} ;$$

Tali espressioni vengono indicate come funzioni trigonometriche dell'azimut: infatti l'angolo α che la tangente ad una generica curva S forma in un suo punto P con la tangente al meridiano per il punto stesso si indica, per definizione, come azimut in P della curva S.

L'ultima delle tre relazioni trigonometriche permette di scrivere l'equazione di una curva dell'ellissoide che taglia i meridiani sotto un angolo costante $\overline{\alpha}$. In ogni punto di tale curva sara`:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{r}{\rho}\frac{d\omega}{d\phi} = \mathrm{tg}\,\overline{\alpha} = cost$$

e poiche` r e $\rho$ sono funzioni di $\phi$, si avra` integrando, per la curva di azimut $\overline{\alpha}$ uscente da un punto di coordinate ω_o, ϕ_o:

$$\omega - \omega_o = \mathrm{tg}\,\overline{\alpha} \cdot \int_{\phi_o}^{\phi} \frac{\rho}{r}\, d\phi$$

Tale curva si chiama **lossodromia**, e` da segnalarsi per l'importanza che ha in navigazione: una nave, che si rechi da un punto P ad un punto Q seguendo sempre la stessa rotta, percorre appunto una curva che taglia i meridiani sotto un angolo costante, una lossodromia dunque, nell'ipotesi che la superficie del mare sia un ellissoide di rotazione.

Lunghezza di archi finiti di parallelo e di meridiano

La determinazione della lunghezza di archi finiti di parallelo e di meridiano ha notevole importanza soprattutto in relazione alla determinazione geometrica dei parametri dell'ellissoide terrestre.

La lunghezza di un arco di parallelo di latitudine ϕ, compreso fra le longitudini ω_1 e ω_2, si ottiene integrando:

$$\sigma_p = \int_{\omega_1}^{\omega_2} r\, d\omega = r \cdot (\omega_2 - \omega_1)$$

dove per r si adotta la nota espressione: $r = \frac{a\cos\phi}{\sqrt{1 - e^2 sen^2 \phi}}$.

Analogamente per il calcolo della lunghezza dell'arco di meridiano, integrando tra due valori della latitudine:

$$\sigma_m = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \rho\, d\phi = a(1 - e^2)\int_{\phi_1}^{\phi_2} (1 - e^2 sen^2 \phi)^{-\frac{3}{2}}\, d\phi$$

(*) Quest'ultimo integrale si puo` risolvere solo tramite uno sviluppo in serie.

Sezioni normali principali dell'ellissoide di rotazione

Allo scopo di definire una geometria sull'ellissoide di rotazione occorre non solo definire le equazioni delle curve idonee a definire in modo univoco la posizione relativa di punti appartenenti alla superficie stessa , ma anche definire la curvatura delle curve stesse, che in generale sara` variabile da punto a punto.

La curvatura di una qualsiasi curva appartenente ad una generica superficie puo` essere determinata qualora siano noti in ogni suo punto i raggi di curvatura delle due sezioni normali principali alla superficie nel punto stesso: e` necessario ricercare i raggi principali di curvatura dell'ellissoide in un suo punto generico.

Si definisce **primo verticale** il piano perpendicolare al piano tangente all'ellissoide in P, quindi perpendicolare al meridiano per P; la sezione lasciata da questo piano verticale sull'ellissoide viene chiamata **seconda sezione principale.** La prima sezione principale e` costituita appunto dal meridiano stesso per P.

I valori dei raggi di curvatura di queste sezioni principali in un punto di latitudine ϕ si ricavano facilmente: uno e` quello del meridiano gia` calcolato precedentemente:

$$\rho = -\frac{1}{sen\,\phi}\frac{dr}{d\phi} = \frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\,sen^2\,\phi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Per quanto riguarda il raggio di curvatura del primo verticale si deve far ricorso al **teorema di Meusnier**, tale teorema lega il valore del raggio di curvatura alla sezione intersezione dell'ellissoide con il piano per P ortogonale al piano meridiano; nel caso particolare di piano per P normale alla superficie dell'ellissoide:

$$R_2 = N = \frac{r}{cos\,\phi} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\,sen^2\phi}}$$

questo raggio di curvatura viene indicato con N ed e` detto **gran normale**.

Per la formula di Eulero il raggio di curvatura R_a di una sezione normale qualunque, che forma col meridiano l'azimut α, sara` dato:

$$\frac{1}{R_a} = \frac{cos^2\alpha}{\rho} + \frac{sen^2\alpha}{N}$$

Si puo` dimostrare che fissato un punto P sull'ellissoide, tra tutte le infinite sezioni all'ellissoide per quel punto, la gran normale N corrisponde al valore massimo, mentre ρ (raggio di curvatura del meridiano in P) corrisponde al valore minimo.

Il raggio medio di curvatura delle infinite sezioni normali all'ellissoide in un fissato punto P e` data dall'espressione:

$$R_m = \sqrt{R_1 \cdot R_2} = \sqrt{\rho N} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\,sen^2\,\phi};$$

Tale raggio individua per l'ellissoide in un suo punto una sfera - la cui superficie meglio approssima quella dell'ellissoide nell'intorno del punto stesso - che viene detta **sfera locale**.

Fondamenti teorici della geodesia operativa

Come gia` detto la soluzione del problema del rilievo comporta, una volta fissata la forma e le dimensioni della superficie di riferimento, l'esecuzione di misure di angoli e distanze che a rigore dovrebbero essere eseguite sulla superficie di riferimento stessa.

Le oprazioni di misura devono tuttavia necessariamente svolgersi sulla superficie fisica della terra e sono strettamente legate alla normale al geoide, ovvero alla verticale.

Nell’ipotesi che gli scostamenti fra geoide ed ellissoide siano a tali effetti trascurabili e quindi la normale ellissoidica coincida con la verticale, si puo` affermare in prima approssimazione che gli elementi misurati siano quelli relativi a sezioni normali ellissoidiche.

Per questo motivo e` molto impirtante lo studio delle sezioni normali all’ellissoide e il loro comportamento fra punti assegnati della superficie. Se su una sfera consideriamo due punti e le rispettive perpendicolari alla superficie sferica, abbiamo che ambedue sono comprese nello stesso piano che taglia la sfera lungo una circonferenza; invece due punti su un ellissoide con le rispettive perpendicolari alla superficie non sono contenute dallo stesso piano; questo vuol dire che un piano passante per la perpendicolare di uno dei due punti puo` passare per il rimanente punto senza contenere la sua perpendicolare alla superficie. Unica eccezione, nel caso dell’ellissoide di rotazione, quando i due punti considerati si trovano o lungo un meridiano o lungo un parallelo: solo in questi casi le due normali sono complanari.

In generale si osserva che piu` ci si allontana dalla forma sferica piu` lo sdoppiamento delle sezioni normali diviene sensibile.

Dal punto di vista teorico la duplicita` delle sezioni normali per due punti sull’ellissoide ha una fondamentale importanza ai fini della determinazione delle posizioni reciproche dei punti sulla superficie terrestre. Notare che nel caso di superficie di riferimento ellissoidica, la notata duplicita` delle sezioni normali per due punti qualsiasi non consente di ricorrere a tali linee per definire in modo univoco i triangoli ellissoidici: infatti dati tre punti esistono in genere sei sezioni normali che li congiungono a due a due.

Per risolvere problemi di posizione di punti sull’ellissoide non si possono quindi utilizzare le sue sezioni normali come a prima vista potrebbe sembrare, visto che le distanze misurate sulla terra sono fatte in riferimento alla perpendicolare della suprficie fisica.

Si presenta cosi` il problema di cercare quali linee dell’ellissoide siano da considerarsi agli effetti che qui ci interessano come le corrispondenti della retta sul piano e dell’arco di cerchio massimo sulla sfera.

Tali linee sull’ellissoide devono godere di queste proprietà:

1. siano univocamente definite fra due punti note che siano le normali superficiali in essi;
2. si discostino il meno possibile (sia linearmente che angolarmente) dalle sezioni normali passanti per ciascun punto, cosi` da potersi identificare con queste in calcoli di non elevato rigore, utilizzando come dati di “input” le misure direttamente rilevate sul terreno. Gli scostamenti devono essere analiticamente valutabili per tener conto del tipo di approssimazione adottato.

Le linee geodetiche

Su una superficie qualsiasi le curve che congiungono senza indeterminazione (in maniera biunivoca) due punti alla volta ad essa appartenenti si dicono **linee geodetiche**.

Per calcolare l’equazione matematica di queste curve particolari occorre dapprima notare che tali curve sono simili a quelle assunte da un filo elastico teso adagiato tra due punti della superficie su cui e` poggiato materialmente: se trascuriamo l’eventuale attrito tra superficie ed elastico, possiamo notare che per l’equilibrio delle forze e` necessario che la reazione della superficie sull’elastico sia uguale e contraria alla risultante delle **due** forze che lo tendono agli estremi: questo non e` altro che dire che la **reazione** della superficie deve giacere sullo **stesso piano** che contiene le due forze agli estremi ; da cio` deriva automaticamente che in ogni punto dell’elastico la reazione deve essere perpendicolare alla superficie su cui poggia.

Da tutto quanto detto deriva che la linea geodetica e` quella particolare curva passante per due punti sulla superficie, tale che in ogni suo punto la normale ad essa coincide con la normale alla superficie in quel punto.

Le linee geodetiche, come conseguenza intuitiva di quanto detto, godono della proprieta` di essere delle linee di lunghezza minima tra tutte quelle che congiungono sulla superficie due punti, purche` si limiti convenientemente la porzione di superficie.

Per scrivere le equazioni delle geodetiche occorre espimere analiticamente la condizione che la normale principale alla curva coincida in ogni suo punto con la normale alla superficie, ossia che le due normali abbiano uguali coseni direttori.

Sia data quindi una superficie di equazione F(x,y,z) = 0 ed una curva appartenente alla superficie di equazioi parametriche: x = x(s) ; y = y(s) ; z = z(s), con "s" lunghezza dell'arco di curva contato da un punto scelto come origine.

I coseni direttori omologhi della normale alla superficie e alla curva in un medesimo punto dovranno essere dunque uguali, questo per qualsiasi sistema di riferimento adottato.

Questo si traduce mediante le relazioni:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{d^2z}{ds^2}}$$

[I]

L'integrazione di una delle tre relazioni (in generale non e` possibile in forma chiusa) porta ad un integrale del tipo: f(x, y, z, $C_1$, $C_2$); fissata l'equazione della superficie si avranno una doppia infinita` di geodetiche passanti per ogni punto, sara` quindi necessario per la determinazione univoca fissare i due valori delle costanti mediante due condizioni iniziali quali ad esempio le coordinate di due punti per i quali deve passare la geodetica o un punto e la direzione per quel punto.

Le geodetiche sull'ellissoide di rotazione

Le equazioni differenziali delle geodetiche acquistano una forma particolarmente semplice nel caso delle superfici di rotazione di equazione, supponendo l'asse di rotazione coincidente con l'asse delle z:

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - f(z) = 0$$

Dalla [I] considero i vari passaggi: $\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{d^2x}{ds^2}$ $\qquad x \cdot \frac{d^2y}{ds^2} - y \cdot \frac{d^2x}{ds^2} = 0$

di cui l'integrale primo e` dato dalla : $x \cdot \frac{d\ y}{ds} - y \cdot \frac{d\ x}{ds} = C_1$; a tale integrale primo possiamo dare una forma piu` significativa introducendo il sistema di coordinate polari r ed ω; indico con r il raggio del parallelo passante per un punto P della geodetica e con ω la longitudine del piano meridiano per P rispetto al meridiano origine, risulta quindi: $x = r \cos\omega$ $y = r\,\mathrm{sen}\omega$, le quali derivate rispetto ad "s" forniscono, ordinando i calcoli: $\mathbf{r\ sen\alpha = C_1}$; tale equazione e` l'integrale dell'equazione differenziale delle geodetiche sull'ellissoide di rotazione, ed esprime la seguente proprieta` (teorema di Clairaut):

in ogni punto di una geodetica tracciata su di una superficie di rotazione e` costante il prodotto del raggio del parallelo per il seno dell'azimut nel punto considerato.

Notiamo che nel caso dei meridiani la relazione **$r\, sen\alpha = C_1$** e` identicamente soddisfatta: i meridiani sono delle particolari geodetiche; con cosiderazioni analoghe si puo` vedere che anche i paralleli sono delle particolari geodetiche.

Si puo` osservare, dato che il seno di un angolo non puo` diventare maggiore dell'unita`,che la costante $C_1$ dovra` avere per massimo valore il raggio equatoriale "a" dell'ellissoide; per una data geodetica d'altra parte r non potra` mai essere minore di $C_1$ per cui la geodetica non potra` avere punti punti che entro la fascia di ellissoide compresa fra due paralleli di raggio C_1 simmetrici rispetto all'equatore.

Supponiamo che una geodetica esca da un punto P equatoriale sotto un'azimut minore di 90 gradi; procedendo verso Nord-Est i raggi dei paralleli che la geodetica incontra vanno via via diminuendo e quindi deve aumentare l'azimut α fino a 90 gradi dove $r = C_1$. Al parallelo di questo raggio la geodetica riuscira` tangente per poi tornare verso l'equatore per valori dell'azimut crescenti da 90 a (180 - $\alpha$) gradi. Passera` quindi a Sud dell'equatore per valori dell'azimut compresi tra (180 -α) e 90 gradi: per quest'ultimo valore della geodetica risultera` nuovamente tangente all'altro parallelo di raggio $r = C_1$ e cosi` di seguito.

Per concludere ricaviamo il raggio di curvatura della geodetica in suo punto generico. Indicando come al solito con α l'azimut della geodetica nel punto considerato, poiche` per definizione il piano osculatore alla geodetica e` normale alla superficie, il suo raggio di curvatura R_g sara` uguale al raggio di curvatura della sezione normale alla superficie avente lo stesso azimut e passante per quel punto:

quindi per la formula di Eulero: $$\frac{1}{R_g} = \frac{cos^2\alpha}{\rho} + \frac{sen^2\alpha}{N}$$ (nel caso di ellissoide di rotazione);

Espressione approssimata dell'equazione delle geodetiche: sviluppi di Puiseux-Weingarten

L'equazione differenziale delle geodetiche su una superficie qualsiasi non e` in genere integrabile in forma finita. Ci si deve limitare ad avere di tali linee delle espressioni approssimate mediante sviluppi in serie arrestati a termini opportuni.

A tale scopo considero una superficie ellissoidica $z = f(x,y)$, scelgo il sistema di riferimento in questo modo:

1. asse x - tangente in 0 al meridiano per esso passante - orientato positivo con verso Sud-Nord;
2. asse y - tangente in 0 al parallelo per esso - orientato positivo in direzione Ovest-Est;
3. asse z perpendicolare in 0 alla superficie ellissoidica;

Siano poi definite le equazioni parametriche $x = (s)$; $y = y(s)$; $z = z(s)$ della geodetica passante per il punto 0.

Sviluppo in serie di Mac-Laurin tali equazioni parametriche fino ai termini del terzo ordine:

$$\begin{cases} x = x(0) + s \cdot \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 + \frac{s^2}{2}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 + \frac{s^3}{3!}\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 + \ldots \\ y = y(0) + s \cdot \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 + \frac{s^2}{2}\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0 + \frac{s^3}{3!}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 + \ldots \\ z = z(0) + s \cdot \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 + \frac{s^2}{2}\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0 + \frac{s^3}{3!}\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)_0 + \ldots \end{cases}$$

lo scopo e` quello di calcolare i coefficienti dell'incognita "s" nel caso dell'ellissoide di rotazione e relativamente al particolare sistema di riferimento scelto.

Osserviamo che i termini x(0), y(0), z(0) sono nulli per come abbiamo messo il sistema di riferimento; inoltre risulta ovviamente:

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 = \cos\alpha \\ \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 = sen\,\alpha \end{cases} ;$$

inoltre, poiche`nell'origine del sistema di riferimento la tangente alla geodetica e` normale all'asse delle z (ovvero nell'intorno di 0 la geodetica ds non ha variazioni lungo l'asse z), risulta:

$$\left(\frac{dz}{ds}\right)_0 = 0 .$$

Ricordando le espressioni dei coseni direttori di una retta per 0 perpendicolare alla superficie:

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 = \cos x\bar{n} = 0 \qquad \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0 = \cos y\bar{n} = 0 \qquad \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0 = \frac{1}{R_g} ;$$

questo perche` la normale alla geodetica nel punto 0 e` **coincidente** con l'asse **z** - per come e` stato disposto il sistema di riferimento adottato -

R_g e` il raggio di curvatura della geodetica nel punto 0.

Inoltre le espressioni: $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{1}{\rho}$ $\qquad$ $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{1}{N}$

risultano rispettivamente i raggi di curvatura del meridiano e del parallelo, e servono per calcolare $\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0$ e il termine $\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0$.

Quindi omettendo per semplicita` i passaggi algebrici, e sfruttando le relazioni - che definiscono le curve geodetiche su una superficie f(x;y) = z - date da:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{d^2z}{ds^2}} \qquad \rightarrow \qquad F(x,y,z) = f(x,y) - z$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{-\frac{\partial z}{\partial z}}{\frac{d^2z}{ds^2}} \qquad \text{poiche` e`: } f(x,y) = z \text{ (funzione)} \quad \Rightarrow \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{-1}{\frac{d^2z}{ds^2}}$$

si arriva, con non pochi passaggi, alle espressioni finali, che ci interessano:

$$\begin{cases} x = s\cos\alpha - \dfrac{s^3\cos\alpha}{6\rho R_g} + \ldots \\ y = s\,sen\,\alpha - \dfrac{s^3\,sen\,\alpha}{6NR_g} + \ldots \\ z = \dfrac{s^2}{2R_g} + \ldots \end{cases}$$

In tali espressioni compare il valore del raggio di curvatura della geodetica nel punto 0, il suo valore nel punto si calcola con la nota relazione:

$$\frac{1}{R_g} = \frac{\cos^2\alpha}{\rho} + \frac{sen^2\alpha}{N}.$$

Si puo` ammettere a priori la convergenza delle tre serie in quanto la loro convergenza e` perlomeno giustificata fisicamente dalla considerazione che le coordinate di un punto della geodetica posto a distanza finita dall’origine devono avere necessariamente un valore finito.

Da notare che per rilievi geodetici, la lunghezza “s” di un arco di geodetica che entra in gioco tra i punti di inquadramento non supera, salvo casi eccezionali, i 100 km, questo significa che i termini omessi negli sviluppi sono dell’ordine di 10^{-9} per x e y e dell’ordine di 10^{-7} per z i rapporti con la lunghezza dell’arco s: ($\Delta x/s$; $\Delta y/s$); quantita` sicuramente trascurabili rispetto alla precisione con cui si effettuano le misurazioni, che con i mezzi piu` sofisticati puo` raggiungere al piu` una precisione dell’ordine di 10^{-6}.

Scostamenti fra sezioni normali e geodetiche

L’introduzione delle geodetiche consente di individuare in maniera univoca figure geometriche , ed in particolare triangoli, sulla superficie dell’ellissoide di riferimento e quindi di istituire su questo una geometria che valga a risolvere analiticamente il problema del rilevo.

La differenza di azimut fra sezioni normali e geodetiche, a parita` di lunghezza dell’arco s di geodetica, considerando il caso in cui la differenza e` massimamente amplificata, e cioe` all’equatore, e` dell’ordine al massimo del centesimo di secondo sessagesimale; nelle misure eseguite in campagna la precisione eseguita nelle misure raggiunge al max qualche decimo di secondo sessagesimale.

Qualche differenza puo` avvertirsi per archi di geodetiche lunghe circa 200 Km, ma questo e` un caso veramente particolare; quindi tutto cio` porta a concludere che una misura di azimut riferita ad una sezione normale dell’ellissoide puo` di fatto considerarsi uguale a quella relativa alla geodetica corrispondente (notare che essendo in generale la geodetica una curva gobba, la sua tangente t nell'origine - di azimut α - non coincide con la sezione per lo stesso punto del piano perpendicolare alla superficie - in generale di azimut diverso da α).

Dfferenza di lunghezza fra archi di sezioni

normali e di geodetiche

Se si considerano uscenti da uno stesso punto una geodetica ed una sezione normale che passino ambedue per un dato punto P, con α azimut della geodetica e con A azimut della sezione normale, tramite relazioni su un triangolo infinitesimo tracciato considerando la normale per P alla geodetica si puo` arrivare alla relazione:

$$\sigma - s = \frac{s^5 e^4}{360 N^2 R_g} \cos^4 \phi \, sen^2 \, 2A$$

Per A = 45 gradi , ϕ = 0 ed s =200 Km, dove e` amplificato al max lo scostamento, si ha che lo scostamento tra sezione normale e geodetica risulta pari a 2,5 x 10^{-5} mm; per s = 1000Km tale differenza raggiunge il valore di 0,078 mm.

Se ne conclude quindi che la differenza di lunghezza delle due curve e` sempre del tutto trascurabile in quanto largamente inferiore alla max precisione di rilievo sul terreno.

Da quanto detto si possono enunciare i **teoremi della Geodesia operativa**:

1. fino a lunghezze di archi dell'ordine del centinaio di chilometri gli angoli misurati fra sezioni normali dell'ellissoide differiscono da quelli delle corrispondenti geodetiche di quantita` sicuramente inferiori alla massima precisione conseguibile nelle misure angolari e quindi possono essere considerati uguali agli angoli fra le geodetiche stesse;
2. la differenza di lunghezza fra un arco misurato di sezione normale ed il corrispondente arco di geodetica e` sempre trascurabile per qualsiasi valore dell'arco stesso.

E quindi possibile, per la determinazione delle relazioni di posizione dei punti sulla superficie ellissoidica di riferimento, introdurre nei calcoli (che a rigore dovrebbero riguardare dati relativi al solo ellissoide) le distanze e gli angoli misurati sul terreno e trattarli come dati rilevati sull'ellissoide.

Soluzioni approssimate per la superficie di riferimento

Dati gli sviluppi in serie delle coordinate parametriche, ci proponiamo di stabilire quali termini di tali serie si debbano conservare, quali invece si possano conservare, quali invece si possano trascurare e quando cio` sia lecito, confrontandoli con le piu` piccole quantita` che e` possibile apprezzare con gli strumenti di misura durante le operazioni pratiche di rilievo.

A tale proposito conviene riferirsi a dati desunti dall'esperienza e sicuramente accertati. Nelle misure lineari eseguite con i migliori metodi e con i mezzi piu` potenti di cui oggi disponiamo possiamo disporre di una precisione che arriva al massimo di un millimetro su un chilometro, ovvero di un errore relativo pari a 10^{-6} sulla misura della lunghezza. Nelle misure angolari eseguite in campagna si ha che anche in osservazioni di altissima precisione e` difficile raggiungere una precisione pari al decimo di secondo sessagesimale, ossia in radianti a 0,5 x 10^{-6}.

Considerazioni analoghe possono farsi anche in ordine alla determinazione delle differenze di quota, ossia della coordinata z dei punti: anche in tal caso adottando strumentazione e modalita` operative idonee, la max precisione conseguibile nella misura della differenza di quota di due punti distanti 1 Km e` dell'ordine del millimetro. Anche nella determinazione della coordinata z dei punti si puo` quindi considerare il valore di 10^{-6} come minimo errore relativo, inteso come rapporto fra l'errore Δz e la distanza s dei punti considerati.

Campo piano o topografico

Prima di procedere ricordiamo che la differenza di lunghezza di una geodetica (passante per i due punti "O" e "P"), e la sezione normale in "O" (e passante per "P"): quest'ultima da considerarsi come la distanza "OP", misurata con lo strumento posto in "O" con l'asse coincidente con la verticale in "O"- tutte e due sull'ellissoide - e` trascurabile anche per distanze dell'ordine di 1000 Km; **ora riportiamo sul piano un segmento di retta, uguale alla lunghezza dell'arco "s" di geodetica sull'ellissoide**. Questa approssimazione introdotta - deformare la forma della geodetica da curva a retta per "adagiarla" sul piano, <u>mantenendo inalterata la sua lunghezza</u> - comportera` degli errori che dovranno essere per forza trascurabili. Cio` serve per individuare quell'intorno del punto "O" sull'ellissoide che puo` essere "trattato" come una porzione di piano: questo intorno dovra` essere caratterizzato dal fatto che <u>la variazione</u> della forma della geodetica (nell'essere "adagiata" dall'ellissoide al piano), <u>non deve essere "avvertita"</u> dagli strumenti di misura, quando calcoliamo le coordinate del punto "P", facendo riferimento, per i calcoli, alla superficie piana. Tutto cio` ha lo scopo, una volta calcolata una distanza OP sul terreno, di individuare le coordinate del punto P da O, servendoci della semplice geometria del piano.

In un piano tangente in P all'ellissoide in un intorno da definire si possono adottare come coordinate di un punto sul piano le note relazioni:

le coordinate del punto P sono quindi nel caso del piano:

$$\begin{cases} x = s\cos\alpha \\ y = s\,sen\,\alpha \\ z = 0 \end{cases}$$

la differenza fra tali coordinate e quelle derivate dagli sviluppi in serie risultano:

$$\begin{cases} \Delta x = \dfrac{s^3 \cos\alpha}{6\rho R_g} \\ \Delta y = \dfrac{s^3\, sen\,\alpha}{6NR_g} \\ \Delta z = \dfrac{s^2}{2R_g} \end{cases}$$

tali differenze risulteranno massime per $\phi = 0$, cui corrispondono i valori minimi dei vari raggi di curvatura, e per $\alpha = 0$ o 90 gradi; l'esame di questi termini porta a concludere che fino ad una distanza max dall'origine dell'ordine dei 15 Km, la differenza relativa di coordinate del punto P sul piano tangente e del punto sull'ellissoide e` inferiore al valore di 10^{-6} precedentemente indicato come massima precisione relativa conseguibile nelle operazioni di misura.

Discende quindi che la differenza tra le due coordinate puo` essere trascurata a tutti gli effetti e che per una zona di 15 Km di raggio nell'intorno dell'origine si potra` assumere, agli **effetti del solo rilievo planimetrico**, il piano tangente all'ellissoide nel punto stesso come superficie di riferimento, utilizzando le note formule della trigonometria piana.

La porzione di ellissoide entro la quale tale approssimazione e` lecita si indica col nome di campo piano o campo topografico. Una tale approssimazione non e` viceversa lecita per la determinazione della quota dei punti per la quale occorre tenere conto della curvatura della superficie di riferimento; infatti lo scostamento in direzione dell'asse z fra ellissoide e piano tangente e quindi la differenza Δz non puo` essere trascurata anche per distanze molto modeste: si e` infatti misurato che per distanze di 100 m gia` si hanno degli errori nelle misure di quota che arrivano a 0,0008 m, fino ad arrivare ad una distanza di 10, 15 Km con errori rispettivamente di 8, 18 m.

Dunque appare chiaro non e` lecito trascurare la curvatura della superficie di riferimento anche in un intorno del punto di 100 m di raggio (errore di circa 0,8 mm) dato che con gli strumenti si puo` ottenere una precisione di misure di quota dell'ordine del decimo di millimetro (0,1 mm) tra punti distanti 100 m. Dunque l'ipotesi piana estesa al campo topografico anche per la determinazione delle differenze di quota porterebbe queste ultime ad un errore max di quasi 18 m e quindi assolutamente intollerabile.

Campo sferico o geodetico

Si consideri una sfera di raggio $R = \sqrt{\rho N}$ tangente all'ellissoide nel punto origine "O"; **sul cerchio max passante per "O" e di azimut α fissiamo un punto P_1 tale che l'arco OP_1 abbia lunghezza s uguale a quella dell'arco di geodetica OP** (al solito tenere conto del fatto, gia` noto, che si possono trascurare le differenze di lunghezza tra la geodetica passante per "O" e per "P", e la relativa sezione normale in "O" e passante per "P" sull'ellissoide: **quest'ultima e` nient'altro che la distanza tra "O" e "P", misurata con lo strumento posto in "O" e con l'asse lungo la verticale in "O"**; questa sezione normale in "O" e passante per "P" sull'ellissoide, si "trasporta" sulla sfera locale, <u>provvedendo a mantenere invariata la sua lunghezza</u> - sara` quindi, sulla sfera, un arco di cerchio max con lunghezza immutata uguale a quella che ha sull'allissoide -). E` come se "trasportassimo" questa linea di geodetica cosi` come e` dall'ellissoide alla sfera locale su cui viene poi "adagiata", deformandola ma <u>mantenendo immutata la sua lunghezza</u>; si vuole vedere fino a che punto cio` e` lecito: "adagiando" la geodetica sulla superficie sferica, la si deforma, pur rimanendo di ugual lunghezza; questa deformazione conseguente, deve rimanere trascurabile ai fini del calcolo delle coordinate del punto "P", calcolate ora facendo riferimento ad una superficie sferica anziche` ellissoidica; si cerca dunque sulla sfera - anziche` sull'ellissoide - l'intorno dentro cui questo e` possibile. Questa approssimazione dovra` portare ad errori del tutto trascurabili sul valore delle coordinate, altrimenti non sara` accettabile. E` ovvio che l'ampiezza di questo intorno sara` subordinato in qualche modo alla precisione con cui attualmente siamo in grado, con gli strumenti, di misurare le distanze: l'errore deve quindi essere intorno ad 1 mm di errore ogni Km di tratto di lunghezza misurato.

Consideriamo un sistema di riferimento solidale alla sfera con l'asse x che forma l'angolo azimut α con il suo meridiano (arco di cerchio max), l'asse y e` perpendicolare all'asse x e quindi alla retta tangente in 0 al meridiano: riportiamo verticalmente la proiezione del punto sul meridiano della sfera sul piano individuato dal piano x y, tale distanza e` la coordinata z; le altre due coordinate del punto P_1' - proiezione di P_1 sul piano xy - sono ovviamente: $x = OP_1' \cos\alpha$; $y = OP_1' \operatorname{sen}\alpha$; in definitiva le coordinate sferiche sono date dalle:

$$\begin{cases} x = OP_1' \cos\alpha \\ y = OP_1' \operatorname{sen}\alpha \\ z = R - R\cos\alpha \end{cases}$$

indichiamo con ω l'angolo al centro il cui valore in radianti e` pari a $\omega = \frac{s}{\sqrt{\rho N}}$ ed e` quindi da considerarsi come grandezza piccola di primo ordine.

Sviluppando il seno e il coseno fino ai termini del terzo ordine compresi, a meno quindi di quantita` piccole di quarto ordine gia` trascurate nella serie; sostituendo tali sviluppi nelle espressioni delle coordinate, si ha:

$$sen\,\omega \rightarrow sen\,\omega = \omega - \frac{\omega^3}{3!} + \ldots \qquad cos\,\omega \rightarrow cos\,\omega = 1 - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^4}{4!} + \ldots$$

$$\begin{cases} x = R\,cos\,\alpha\left(\omega - \dfrac{\omega^3}{6}\right) = s \cdot cos\,\alpha - \dfrac{s^3\,cos\,\alpha}{6\rho N} \\ y = R\,sen\,\alpha\left(\omega - \dfrac{\omega^3}{6}\right) = s \cdot sen\,\alpha - \dfrac{s^3\,sen\,\alpha}{6\rho N} \\ z = R - R\left(1 - \dfrac{\omega^2}{2}\right) = \dfrac{s^2}{2\sqrt{\rho N}} \end{cases} \qquad [II]$$

Per $\phi = 0$ e per $\alpha = 0$ o 90, cui corrispondono anche in questo caso in valore assoluto le massime differenze tra le coordinate, si ha che per archi di lunghezza s di 50 Km si ha uno scostamento dalle ccordinate sviluppate in serie, di circa 3,5 mm, fino ad arrivare a lunghezze di 200 Km dove l'errore e` di circa 230 mm (in quest'ultimo caso l'errore relativo alla lunghezza s rientra nell'ordine della precisione delle misure: 10^{-6}). Per ragioni prudenziali e per quanto visto in merito agli scostamenti angolari fra sezioni normali e geodetiche, si suole fissare in 100 Km la distanza max dall'origine entro la quale le differenze fra le coordinate x ed y dei due punti possono essere sicuramente trascurate.

Si definisce in tal modo un intorno che si indica come campo sferico o geodetico all'interno del quale e` lecito ai soli fini del rilievo planimetrico confondere l'ellissoide di riferimento con una sfera, avente la propria normale coincidente con quella ellissoidica nel punto centrale della zona che si considera e di raggio $R = \sqrt{\rho N}$,e cioe` con quella che gia` e` stata indicata come sfera locale.

Nel campo cosi` definito si potranno quindi sostituire alle figure ellissoidiche le corrispondenti figure sferiche, aventi uguali elementi angolari e lineari, commettendo nella determinazione delle coordinate planimetriche dei punti degli errori sempre trascurabili, in quanto certamente inferiori a quelli derivanti dalle misure.

Per la determinazione delle quote (ricordarsi che le ccordinate x y definiscono la posizione planimetrica del punto, mentre la coordinata z definisce la quota) dei punti i limiti di validita` dell'ipotesi sferica per la superficie di riferimento risultano sensibilmente piu` ristretti, come risulta da valori misurati: gia` per punti distanti 1 Km l'errore di posizione della quota e` circa di 0,03 cm, si arriva anche, per punti distanti 100 Km, ad un errore assoluto di 266 cm, (questi valori si riferiscono all'equatore dove l'errore e` massimamente amplificato); al polo l'errore $\Delta z$ si annulla perche` al polo tutte le sezioni normali sono sezioni meridiane (meridiani) aventi in quel punto uguale curvatura - vedere ultima delle [II].

Tenuto conto della precisione conseguibile nei procedimenti operativi come la livellazione trigonometrica, si puo` concludere che la sfera locale puo` essere asunta come superficie di riferimento per la determinazione delle differenze di quota quando le distanze non eccedono i 10-20 Km nell'intorno del punto di origine.

Concludendo si puo` dire che per risolvere il problema planimetrico e quindi per la soluzione di figure tracciate sulla superficie ellissoidica, al fine di determinare le relazioni di posizione dei punti, sara` senz'altro lecito ricorrere ai noti metodi della trigonometria piana nel campo topografico, mentre nel campo geodetico sara` da utilizzare la trigonometria sferica.

In quest'ultimo caso esistono delle difficolta` di calcolo: i lati dei tiangoli sferici risultano molto piccoli e quindi difficili da determinare senza apprezzabili errori; a questa difficolta` viene pero` in aiuto il **teorema di Legendre**: un triangolo sferico contenuto nel campo geodetico puo` essere, ai fini del calcolo, considerato come un triangolo piano avente i lati uguali a quelli del triangolo sferico rettificati e gli angoli diminuiti ognuno di un terzo dell'eccesso sferico, essendo quest'ultimo pari al rapporto fra l'area del triangolo ed il quadrato del raggio della sfera locale.

Tutto questo detto finora si riferisce alla sola parte planimetrica del rilievo; per quanto riguarda invece il rilievo altimetrico l'ipotesi piana e` quasi sempre non accettabile se non per distanze e con precisioni modeste, mentre l'ipotesi sferica e` accettabile in un campo sensibilmente piu` ristretto di quello del piano a meno di non accontentarsi di precisioni relativamente scarse nella determinazione delle differenze di quota.

L'obiettivo finale di qualsiasi operazione di rilievo e` quello di calcolare sulla superficie di riferimento le coordinate di un certo numero di punti, la cui posizione relativa sia stata individuata mediante opportune misure eseguite sul terreno.

Le operazioni di rilievo portano a determinare distanze ed angoli fra punti della superficie fisica; nell'ambito del campo topografico gli elementi lineari ed angolari relativi alle geodetiche possono essere considerati uguali a quelli relativi ai segmenti di retta sul piano.

Quando pero` i punti, di cui si vogliono calcolare le coordinate, hanno fra loro notevole di stanza per cui non e` accettabile considerarli appartenenti al campo topografico, conviene ricorrere a sistemi di coordinate curvilinee (proprio sull'ellissoide di rotazione), in quanto costituiscono un riferimento piu` naturale e piu` strettamente inerente alla natura geometrica delle figure tracciate sulla superficie stessa.

I sistemi di coordinate curvilinee piu` comunemente usate possono essere classificati in due categorie: **sistemi generali** e **sistemi locali**. I primi consentono di individuare la posizione assoluta dei punti della superficie di riferimento quando si ha a che fare con rilievi di grandi dimensioni, e fra essi rientrano le coordinate geografiche ellissoidiche gia` note.

Le coordinate locali sono utiliper definire la posizione dei punti sull'ellissoide rispetto a due parametri noti in partenza: un punto ed una direzione per esso.

I sistemi di coordinate locali comunemente usati in geodesia sono i seguenti:

coordinate geodetiche polari: un punto P viene determinato, rispetto ad un altro punto O e dal meridiano che passa per esso, dall'arco di geodetica s = OP e dall'azimut α, contato in senso orario dal meridiano di riferimento.

Coordinate geodetiche ortogonali: un punto P viene determinato, rispetto ad un altro punto O ed al meridiano passante per esso, dall'arco di geodetica Y condotta da P normalmente al meridiano e dall'arco di meridiano $X = OP_1$: la coordinata X si considera positiva per punti a Nord dell'origine e quella Y per punti ad Est.

Notare che le coordinate geodetiche polari discendono, direttamente o attraverso calcoli, dalle operazioni di rilievo sul terreno. Consideriamo infatti una rete di triangoli geodetici, o di altre figure ellissoidiche, che copra una zona comunque estesa della superficie terrestre. Eseguendo un numero sufficiente di determinazioni angolari e di distanze e` possibile conoscere, o per misura diretta o per calcolo, le lunghezze di tutti i lati e gli angoli fra gli stessi ed individuare, mediante coordinate geodetiche polari, la posizione relativa dei vertici della rete, che costituiscono i punti d'inquadramento per le successive fasi del rilievo.

Un tale sistema di coordinate curvilinee non si presta tuttavia ad individuare la posizione assoluta dei punti sull'ellissoide e neppure quella relativa, qualora la zona interessata non sia particolarmente ristretta.Per questi motivi quindi occorre affrontare il problema della trasformazione delle coordinate geodetiche polari in quelle ortogonali e nelle coordinate geografiche.

Coordinate geodetiche polari ed ortogonali

Trasformazione diretta.

Consideriamo un punto 0 assunto come origine, ed il meridiano che passa per esso; rispetto a tale sistema di riferimento locale sia nota la posizione di un altro punto P attraverso le sue coordinate geodetiche polari s ed α. Per ricavare le coordinate geodetiche ortogonali X ed Y del punto P occorre risolvere il triangolo ellissoidico OPP_1; (P_1 si ottiene facendo passare la geodetica da P fino ad incontrare perpendicolarmente il meridiano da cui si misura l'azimut).

Se tale triangolo, come il piu` delle volte avviene, e` tutto contenuto nel "campo geodetico" o sferico - vale quindi l'ipotesi sferica: tutti i triangoli geodetici possono singolarmente essere calcolati sulla sfera locale il cui raggio sia determinato in un punto prossimamente baricentrico del triangolo stesso - possiamo trattarlo come un triangolo sferico, e risolvere quest'ultimo secondo il **teorema di Legendre**, come un triangolo piano avente i lati uguali a quelli del primo e gli angoli diminuiti ognuno di una quantita` pari ad un terzo dell'eccesso sferico $\varepsilon /3$. Questo triangolo viene quindi trattato mediante i teoremi dei triangoli rettangoli della geometria piana, per cui applicandogli il teorema dei seni otteniamo le relazioni:

$$X = \frac{s \cdot cos\left(\alpha - \frac{2}{3}\varepsilon\right)}{cos\frac{\varepsilon}{3}} \cong s \cdot cos\left(\alpha - \frac{2}{3}\varepsilon\right) \qquad Y = \frac{s \cdot sen\left(\alpha - \frac{2}{3}\varepsilon\right)}{cos\frac{\varepsilon}{3}} \cong s \cdot sen\left(\alpha - \frac{2}{3}\varepsilon\right)$$

[2]

(nei passaggi si puo` considerare uguale ad 1 il coseno di $\varepsilon /3$ in quanto numero molto piccolo)

Il valore dell'eccesso sferico puo` farsi indifferentemente, nell'ambito di validita` di approssimazione sferica, indifferentemente con gli elementi del triangolo piano o con quelli del triangolo sferico; utilizzando questi ultimi si avra` quindi:

$$\varepsilon = \frac{\frac{1}{2} \cdot s \cdot sen\,\alpha \cdot s \cdot cos\,\alpha}{\rho N} \qquad [1]$$

sostituendo la [1] nella [2] e sviluppando le funzioni trigonometriche, ed adottando l'approssimazione, peraltro lecita: $cos\varepsilon = 1$; $sen\varepsilon = \varepsilon$, abbiamo le coordinate cercate:

$$\begin{cases} X = s \cdot cos\,\alpha + \frac{2}{3} \cdot \varepsilon \cdot s \cdot sen\,\alpha \\ Y = s \cdot sen\,\alpha - \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot s \cdot cos\,\alpha \end{cases} \qquad [3]$$

Qualora l'eccesso sferico risulti nettamente trascurabile, e questo si verifica per distanze contenute pressappoco nel campo topografico, le [3] si scrivono semplicemente:

$$\begin{cases} X = s \cdot cos\,\alpha \\ Y = s \cdot sen\,\alpha \end{cases}$$

che costituiscono le note relazioni fra coordinate cartesiane e coordinate polari nel piano.

Trasformazione inversa.

Il problema inverso consiste nel determinare le coordinate geodetiche polari del punto P ("α" ed "s"), rispetto all'origine 0 ed al meridiano per essa, note che siano le coordinate geodetiche ortogonali X ed Y del punto stesso:

dalle [3] si ricava facilmente:

$$\begin{cases} s \cdot \cos\alpha = X - \frac{2}{3} \cdot \varepsilon \cdot s \cdot \operatorname{sen}\alpha \\ s \cdot \operatorname{sen}\alpha = Y + \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot s \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

sostituendo tali valori nel secondo termine dei secondi membri rispettivamente della seconda e della prima relazione [3], si ottiene:

$$\begin{cases} X = s \cdot \cos\alpha + \frac{2}{3}\varepsilon \cdot \left(Y + \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot s \cdot \cos\alpha\right) \cong s \cdot \cos\alpha + \frac{2}{3}\varepsilon \cdot Y \\ Y = s \cdot \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon \cdot \left(X - \frac{2}{3} \cdot \varepsilon \cdot s \cdot \operatorname{sen}\alpha\right) \cong s \cdot \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon \cdot X \end{cases}$$

[4]

(ho trascurato i termini ε^2).

L'eccesso sferico, per quanto detto prima si puo` calcolare anche in riferimento al triangolo sferico di lati X e Y, per cui la sua area e`: ½ XY; dunque l'eccesso sferico ha espressione:

$$\varepsilon = \frac{\frac{1}{2}XY}{\rho N}$$

sostituendo tale valore nelle [4] e risolvendo si ha:

$$\begin{cases} s \cdot \cos\alpha = X - \frac{XY^2}{3\rho N} \\ s \cdot \operatorname{sen}\alpha = Y + \frac{X^2 Y}{6\rho N} \end{cases}$$

[5]

Tali relazioni risolvono il problema posto: dividendo membro a membro le due uguaglianze scritte si ricava infatti tgα e, noto α, da una qualsiasi delle [5] si deduce il valore di "s":

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Y + \frac{X^2 Y}{6\rho N}}{X - \frac{XY^2}{3\rho N}} \quad \rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y + \frac{X^2 Y}{6\rho N}}{X - \frac{XY^2}{3\rho N}}\right).$$